

# 基于递降阶乘计算的 Tchebichef 矩的 旋转不变量

吴海勇<sup>1), 2)</sup> 舒华忠<sup>1)</sup> 张 辉<sup>1)</sup> 罗立民<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (东南大学计算机科学与工程学院, 南京 210096)

<sup>2)</sup> (南京晓庄学院物理与电子工程学院, 南京 211171)

**摘 要** 传统 Tchebichef 矩的旋转不变量是用几何矩的旋转不变量来表示的, 这就不能避免几何矩冗余信息多、对噪声敏感等缺点。提出了一种新的 Tchebichef 矩的旋转不变量, 用降阶阶乘的性质, 将它转化为可以利用 Tchebichef 矩直接计算的 Tchebichef 中心矩的线性组合。实验表明, 提出的描述子具有更好的旋转不变性。

**关键词** 离散正交矩 Tchebichef 多项式 旋转不变量

**中图法分类号:** TP391.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-8961(2010)03-417-05

## Rotational Invariance of Tchebichef Moments Evaluated via Falling Factor

WU Haiyong<sup>1), 2)</sup>, SHU Huazhong<sup>1)</sup>, ZHANG Hui<sup>1)</sup>, LUO Linlin<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Computer Science and Engineer, Southeast University, Nanjing 210096)

<sup>2)</sup> (School of Physics and Electronic Engineer, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171)

**Abstract** Conventional rotational invariants of Tchebichef moments are represented by rotational invariants of geometric moments, therefore the drawbacks of geometric moments, such as high degree of information redundancy and sensitive to noise, are inevitable. New rotational invariants of Tchebichef moments are proposed in this paper. Using the properties of falling factor, the proposed moments are transformed to linear combinations of Tchebichef central moments which can be evaluated by Tchebichef moments directly. Experiments show that our descriptor outperformed the conventional descriptor in rotational invariants.

**Keywords** discrete orthogonal moments, Tchebichef polynomials, rotational invariants

## 0 引 言

Hu 提出了基于几何矩的不变量<sup>[1]</sup>, 在图像平移、缩放、旋转后能够保持不变, 因而在图像分析和模式识别中得到了广泛应用。但是, 几何矩的核函数是非正交的指数多项式, 使得图像重建变得相当困难, 高阶矩抗噪声的能力比较差。Mukundan 提出

了离散 Tchebichef 矩<sup>[2]</sup>, 具有不需要进行积分的近似, 值的动态范围变化较小, 不需要坐标空间的转换等优点, 相比于传统的连续矩<sup>[1, 3]</sup>, 能够更好地表现图像的特征。

Mukundan<sup>[2]</sup>将 Tchebichef 矩转化为几何矩的线性组合, 然后利用几何矩的旋转不变量来间接计算旋转不变量, 显然这种方法不能避免几何矩的缺点。最近, 他提出在极坐标下的径向 Tchebichef 矩<sup>[4]</sup>, 径

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60272045)

收稿日期: 2008-10-29 改回日期: 2009-01-21

第一作者简介: 吴海勇 (1976—), 男, 讲师。东南大学计算机科学与工程学院图像处理与科学可视化专业博士研究生。主要研究方向为医学图像分析、特征识别等。E-mail: wu\_haiyong@163.com

向采用 1 维的 Tchebichef 多项式, 可以方便构造出旋转不变量, 但是, 计算时需将定义在直角坐标系下的图像转换到极坐标下, 会产生离散误差。本文提出了一种新的 Tchebichef 矩的旋转不变量, 并将之表述为 Tchebichef 中心矩的线性组合, 相对于径向 Tchebichef 矩构成的旋转不变量, 能够更好地描述图像的特征。

# 1 Tchebichef 矩的旋转不变量

## 1.1 Tchebichef 矩

$n$  阶的 Tchebichef 多项式定义为<sup>[5]</sup>

$$t_n(x) = (1-N)_n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-x)_k (1+n)_k}{(k!)^2 (1-N)_k} \quad (1)$$

$n, x = 0, 1, \dots, N-1$

其中,  $(a)_n$  是 Pochhammer 符号:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad n \geq 1 \text{ 且 } (a)_0 = 1 \quad (2)$$

Tchebichef 多项式满足正交性:

$$\sum_{x=0}^{N-1} t_n(x) t_m(x) = \rho(n, N) \delta_m \quad 0 \leq m, n \leq N-1 \quad (3)$$

式中,  $\delta_m$  为 Kronecker 符号, 平方内积  $\rho(n, N)$  定义为

$$\rho(n, N) = (2n)! \binom{N+n}{2n+1} \quad (4)$$

因为 Tchebichef 多项式的值以  $N^n$  增长, 计算时, 通常用尺度变换后的多项式<sup>[6]</sup>:

$$\tilde{t}_n(x) = \frac{t_n(x)}{\beta(n, N)} = \frac{t_n(x)}{\sqrt{\rho(n, N)}} \quad (5)$$

一幅大小为  $N \times N$ , 灰度为  $f(x, y)$  的图像,  $p+q$  阶 Tchebichef 矩定义为

$$T_{pq} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \tilde{t}_p(x) \tilde{t}_q(y) f(x, y) \quad (6)$$

## 1.2 递降阶乘的性质

为了计算方便, 定义递降阶乘  $\langle a \rangle_n$  为

$$\begin{aligned} \langle a \rangle_n &= a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1) \\ &= (-1)^n (-a)_n \quad n \geq 1 \text{ 且 } \langle a \rangle_0 = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Tchebichef 多项式可以改写为

$$\begin{aligned} \tilde{t}_n(x) &= \sum_{k=0}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho(n, N)}} \frac{(n+k)!}{(n-k)! (k!)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{(1-N)_n}{(1-N)_k} \langle x \rangle_k \right] = \sum_{k=0}^n c(n, k) \langle x \rangle_k \end{aligned} \quad (8)$$

显然,

$$c(n, k) = \frac{1}{\sqrt{\rho(n, N)}} \frac{(n+k)!}{(n-k)! (k!)^2} \frac{(1-N)_n}{(1-N)_k} \quad (9)$$

$\langle x \rangle_n$  也可以用 Tchebichef 多项式展开<sup>[7]</sup>:

$$\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^n d(n, k) \tilde{t}_k(x) \quad (10)$$

式中,

$$d(n, k) = (-1)^{n+k} \frac{\sqrt{\rho(k, N)} (2k+1) (n!)^2 (1-N)_n}{(n+k+1)! (n-k)! (1-N)_k} \quad (11)$$

递降阶乘和指数级数  $x^n$  之间也可以相互展开<sup>[8]</sup>:

$$\langle x \rangle_n = \sum_{i=0}^n s_1(n, i) x^i \quad (12)$$

$$x^n = \sum_{i=0}^n s_2(n, i) \langle x \rangle_i \quad (13)$$

其中,  $s_1(n, i)$  为第 1 类 Stirling 数, 满足迭代关系:

$$\begin{aligned} s_1(0, 0) &= 1 \\ s_1(0, i) &= s_1(n, 0) = 0 \quad n \geq 1, i \geq 1 \\ s_1(n, i) &= s_1(n-1, i-1) - (n-1) s_1(n-1, i) \end{aligned} \quad (14)$$

$s_2(n, i)$  为第 2 类 Stirling 数, 满足迭代关系:

$$\begin{aligned} s_2(0, 0) &= 1 \\ s_2(0, i) &= s_2(n, 0) = 0 \quad n \geq 1, i \geq 1 \\ s_2(n, i) &= s_2(n-1, i-1) + i s_2(n-1, i) \end{aligned} \quad (15)$$

与指数级数的二项定理类似, 递降阶乘也满足:

$$\langle a+b \rangle_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle a \rangle_k \langle b \rangle_{n-k} \quad (16)$$

式 (8) 和式 (12) 通过递降阶乘建立了 Tchebichef 多项式和指数级数直接的联系, 指数级数的运算相对比较简单, 而式 (13) 和式 (10) 可以将运算后的指数级数转换为 Tchebichef 多项式, 以便运用矩的定义。

## 1.3 Tchebichef 中心矩

图像的  $p+q$  阶 Tchebichef 中心矩定义为<sup>[9]</sup>

$$\phi_{pq} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \tilde{t}_p(x-x_0) \tilde{t}_q(y-y_0) f(x, y) \quad (17)$$

式中,  $x_0$  和  $y_0$  分别为图像在  $x$  轴和  $y$  轴方向的质心:

$$x_0 = \frac{\sum_x \sum_y x f(x, y)}{\sum_x \sum_y f(x, y)}, \quad y_0 = \frac{\sum_x \sum_y y f(x, y)}{\sum_x \sum_y f(x, y)} \quad (18)$$

由式 (6)、(8)、(10)、(13) 和 (16) 可得:

$$\phi_{pq} = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^k \sum_{a=0}^m \sum_{l=0}^q \sum_{n=0}^l \sum_{b=0}^n \left[ c(p, k) c(q, l) \times a_{k,m}(x_0) a_{l,n}(y_0) d(m, a) d(n, b) T_{ab} \right] \quad (19)$$

式中,

$$a_{ij}(x) = \left\{ \begin{matrix} \langle -x \rangle_{i-j} \end{matrix} \right. \quad (20)$$

式 (19) 说明, Tchebichef 中心矩可以由 Tchebichef 矩直接计算。

### 1.4 Tchebichef 矩的旋转不变量

定理: 对于任意的正整数  $p$  和  $q$  令

$$I_{pq} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \tilde{t}_p((x-x_0)\cos\beta + (y-y_0)\sin\beta) \times \tilde{t}_q((y-y_0)\cos\beta - (x-x_0)\sin\beta) f(x, y) \, dx \, dy \quad (21)$$

式中,  $\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\phi_{11}}{\phi_{20} - \phi_{02}}$ ,  $\phi_{pq}$  为图像的  $p+q$  阶中心矩, 则  $I_{pq}$  对图像是旋转不变的。

证明:

由式 (8) 和式 (12) 可知:

$$\tilde{t}_n(x) = \sum_{k=0}^n c(n, k) \langle x \rangle_k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k c(n, k) s_1(n, i) x^i = \sum_{k=0}^n b(n, k) x^k \quad (22)$$

中,

$$b(n, k) = \sum_{i=k}^n c(n, i) s_1(n, k) \quad (23)$$

式 (21) 可以改写为

$$I_{pq} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q b(p, i) b(q, j) V_{ij} \quad (24)$$

其中,

$$V_{ij} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} ((x-x_0)\cos\beta + (y-y_0)\sin\beta)^i \times ((y-y_0)\cos\beta - (x-x_0)\sin\beta)^j f(x, y) \, dx \, dy \quad (25)$$

由文献 [1] 可知,  $V_{ij}$  是对于图像旋转不变的, 因此,  $I_{pq}$  对图像也是旋转不变的, 定义为图像的  $p+q$  阶旋转不变量。

Tchebichef 多项式定义在离散的点上, 直接用式 (21) 计算旋转不变量也不能避免离散误差, 运用递降阶乘的性质, 不难将旋转不变量表示为中心矩的线性组合:

$$I_{pq} = \sum_{k=0}^p c(p, k) \sum_{i=0}^k s_1(k, i) \sum_{j=0}^i \left| \begin{matrix} \cos^i \beta \sin^{i-j} \beta \times \sum_{l=0}^q c(q, l) \sum_{m=0}^l s_1(l, m) \sum_{n=0}^m \left| \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right| (-1)^{m-n} \cos^n \beta \sin^{m-n} \beta \times \sum_{s=0}^{i+n-j} d(i+n-j, s) \sum_{r=0}^{j+m-n} d(j+m-n, r) \sum_{v=0}^s s_2(s, v) \times \sum_{u=0}^r s_2(r, u) \phi_{uv} \end{matrix} \right. \quad (26)$$

## 2 实验结果

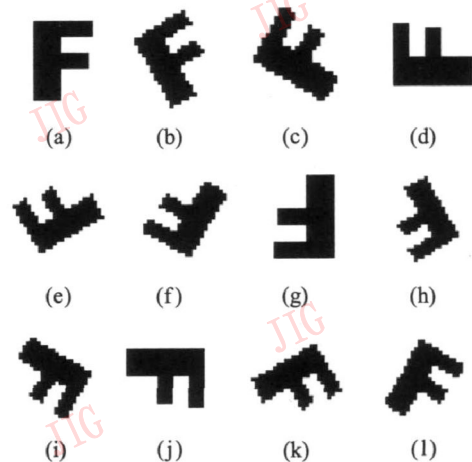


图 1 测试图像集

Fig 1 Test image set

图 1 为测试图像集, 它是由  $32 \times 32$  二值图像“F”, 以  $30^\circ$  的间隔, 逆时针旋转得到。图 2 是由图 1 加上均值为 0 方差为 0.01 高斯噪声后的图像集。分别用式 (26) 和径向 Tchebichef 矩构成的旋转不变量计算图 1 和图 2 0~2 阶的不变量集如表 1~ 表 4 所示。用  $\sigma$  表示不变量集的方差,  $\mu$  表示不变量集的均值, 定义

$$\eta = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \quad (27)$$

$\eta$  可以表征平均变化幅度。实验结果表明, 提出的旋转不变量要优于由径向 Tchebichef 矩构成的旋转不变量。

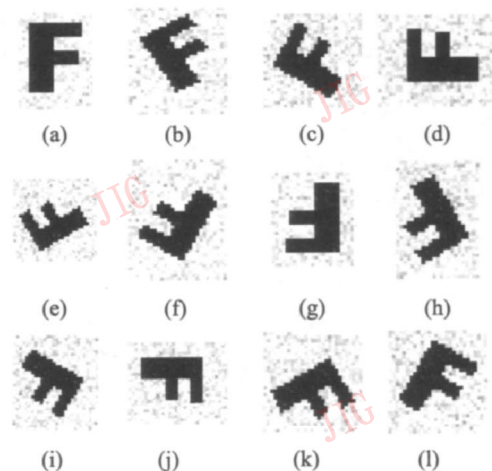


图 2 加噪声后的图像集

Fig 2 Noised image set

表 1 测试图像 Tchebichef 矩的旋转不变量集

Tab 1 Rotational invariants of Tchebichef moments for test image set

图像	$I_{00}$	$I_{01}$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{02}$	$I_{20}$
a	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 008 4	1 651 4	1 513 6
b	3 109 4	- 5 302 1	- 5 302 1	8 946 8	1 536 3	1 620 8
c	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 071 9	1 471 6	1 690 9
d	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 009 6	1 653 0	1 511 9
e	3 109 4	- 5 302 1	- 5 302 1	8 946 0	1 538 8	1 618 3
f	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 071 5	1 471 6	1 690 9
g	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 008 4	1 651 4	1 513 6
h	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 071 9	1 471 6	1 690 9
i	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 009 6	1 653 0	1 511 9
j	3 109 4	- 5 302 1	- 5 302 1	8 946 0	1 538 8	1 618 3
k	3 125 0	- 5 328 7	- 5 328 7	9 071 5	1 471 6	1 690 9
l	3 109 4	- 5 302 1	- 5 302 1	8 946 8	1 536 3	1 620 8
$\eta$	0 25	0 25	0 25	0 59	5 02	4 76

表 2 测试图像径向 Tchebichef 矩的旋转不变量集

Tab 2 Rotational invariants of radial Tchebichef moments for test image set

图像	$I_{00}$	$I_{01}$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{02}$	$I_{20}$
a	1 83E+ 00	1 21E- 04	2 89E+ 00	1 40E- 04	3 20E- 05	1 06E+ 00
b	1 82E+ 00	1 23E- 04	2 86E+ 00	1 09E- 04	4 04E- 05	1 05E+ 00
c	1 87E+ 00	3 32E- 05	2 97E+ 00	3 33E- 05	2 32E- 06	1 12E+ 00
d	1 86E+ 00	2 94E- 05	2 95E+ 00	7 48E- 05	2 17E- 05	1 11E+ 00
e	1 82E+ 00	6 78E- 05	2 88E+ 00	8 28E- 05	8 47E- 09	1 08E+ 00
f	1 86E+ 00	1 39E- 04	2 93E+ 00	1 54E- 04	1 02E- 06	1 10E+ 00
g	1 85E+ 00	2 04E- 05	2 91E+ 00	4 92E- 05	1 56E- 05	1 08E+ 00
h	1 82E+ 00	1 14E- 04	2 87E+ 00	9 51E- 05	2 52E- 05	1 06E+ 00
i	1 80E+ 00	3 90E- 05	2 82E+ 00	3 65E- 05	3 09E- 06	1 02E+ 00
j	1 75E+ 00	4 62E- 05	2 73E+ 00	7 85E- 05	7 44E- 06	9 58E- 01
k	1 84E+ 00	1 11E- 04	2 89E+ 00	1 20E- 04	3 76E- 06	1 05E+ 00
l	1 79E+ 00	1 07E- 04	2 81E+ 00	1 49E- 04	2 07E- 05	1 04E+ 00
$\eta$	1 83	55 26	2 31	44 88	93 81	4 11

表 3 噪声图像 Tchebichef 矩的旋转不变量集

Tab 3 Rotational invariants of Tchebichef moments for noised image set

图像	$I_{00}$	$I_{01}$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{02}$	$I_{20}$
a	5 429 0	- 9 257 4	- 9 257 4	15 697 0	5 431 7	5 444 7
b	5 410 3	- 9 225 6	- 9 225 6	15 597 0	5 276 1	5 461 4
c	5 485 1	- 9 353 1	- 9 353 1	15 932 0	5 635 6	5 327 2
d	5 392 9	- 9 195 9	- 9 195 9	15 591 0	5 482 5	5 267 2
e	5 447 8	- 9 289 5	- 9 289 5	15 764 0	5 566 1	5 389 9
f	5 423 8	- 9 248 7	- 9 248 7	15 762 0	5 546 7	5 273 1
g	5 543 7	- 9 453 1	- 9 453 1	16 057 0	5 721 7	5 425 6
h	5 413 6	- 9 231 2	- 9 231 2	15 684 0	5 338 2	5 361 5
i	5 594 2	- 9 539 2	- 9 539 2	16 139 0	5 721 6	5 583 4
j	5 531 3	- 9 431 9	- 9 431 9	15 980 0	5 513 7	5 533 8
k	5 387 7	- 9 187 1	- 9 187 1	15 656 0	5 197 1	5 401 1
l	5 340 3	- 9 106 2	- 9 106 2	15 400 0	5 178 1	5 529 3
$\eta$	1 36	1 36	1 36	1 37	3 43	1 86

表 4 噪声图像的径向 Tchebichef 矩的旋转不变量集

Tab 4 Rotational invariants of radial Tchebichef moments for noised image set

图像	$I_{00}$	$I_{01}$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{02}$	$I_{20}$
a	2.23E+00	9.99E-05	2.50E+00	8.12E-05	4.91E-05	9.19E-01
b	2.18E+00	1.31E-04	2.44E+00	1.03E-04	4.67E-05	9.24E-01
c	2.23E+00	5.04E-05	2.54E+00	1.43E-05	2.38E-06	9.66E-01
d	2.19E+00	2.98E-05	2.52E+00	1.00E-04	3.46E-05	9.70E-01
e	2.16E+00	6.55E-05	2.44E+00	1.44E-04	1.53E-05	9.31E-01
f	2.22E+00	1.52E-04	2.52E+00	1.28E-04	2.59E-06	9.53E-01
g	2.18E+00	4.84E-05	2.44E+00	3.86E-05	2.00E-05	8.94E-01
h	2.18E+00	1.46E-04	2.48E+00	1.47E-04	2.87E-05	9.43E-01
i	2.06E+00	1.13E-05	2.21E+00	8.79E-05	2.52E-06	7.77E-01
j	2.00E+00	7.77E-05	2.16E+00	1.57E-05	4.70E-05	7.17E-01
k	2.23E+00	1.01E-04	2.51E+00	1.00E-04	1.40E-06	9.26E-01
l	2.12E+00	7.37E-05	2.37E+00	1.52E-04	3.83E-05	8.98E-01
$\eta$	3.41	54.76	5.09	52.15	79.34	8.53

### 3 结 论

提出的旋转不变量由于利用 Tchebichef 矩直接计算, 不需要坐标转换, 没有离散误差, 因此有着较高的精度。类似的方法可以得到其他的离散正交矩, 如 Krawtchouk 矩的旋转不变量。

#### 参考文献 (References)

[1] Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1962, 8(1): 179-187.

[2] Mukundan R, Ong S H. Image analysis by Tchebichef moments [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(9): 1357-1364.

[3] Teague M R. Image analysis via the general theory of moments [J]. Journal of the Optical Society of America, 1980, 70(8): 920-930.

[4] Mukundan R. A new class of rotational invariants using discrete orthogonal moments [C] // Proceedings of the 6th IASTED International Conference on Signal and Image Processing, Calgary, AB, Canada: ACTA Press, 2004: 80-84.

[5] Ismail Mourad. Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005: 195-217.

[6] Mukundan R. Some computational aspects of discrete orthogonal moments [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(8): 1055-1059.

[7] Shu H Z. Image reconstruction from limited range projections using orthogonal moments [J]. Pattern Recognition, 2007, 40(2): 670-680.

[8] Comtet L. Advanced combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions [M]. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974: 34-46.

[9] Zhu H Q. Translation and scale invariants of Tchebichef moments [J]. Pattern Recognition, 2007, 9(40): 2530-2542.